第７講　数列①

【CHECK & UP】

1　［1］　初項が a_1 で，公差 d が整数である等差数列 $\{a_n\}$ が二つの条件

(A)　$a_3+a_5+a_7=93$

(B)　$a_n>100$ となる最小の n は 15 である．

を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この数列の初項と公差を求めよ．

(2)　$\sum_{i=1}^{n} a_i>715$ となる最小の自然数 n を求めよ．

［2］　$b_n=pn+q$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和を S_n とする．$b_7=1$，$S_{12}=10$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　p，q の値を求めよ

(2)　S_n を求めよ．

(3)　$\sum_{k=1}^{12} S_k$ を求めよ．

2　［1］　等比数列 $\{a_n\}$：18，$-6\sqrt{3}$，6，…… について次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ の一般項を n の式で表し，第 6 項を求めよ．

(2)　$\{a_n\}$ の第 3 項から第 13 項までの奇数番目の項の和を求めよ．

［2］　初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2=0$，$a_1+a_2+a_3=\frac{9}{4}$ を満たしている．

このとき次の問いに答えよ．

(1)　$a_4+a_5+a_6$ の値を求めよ．

(2)　$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}=57$ となる n を求めよ．

3　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表されるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(1)　$S_n=2n^2+5n$

(2)　$S_n=3^n+1$

< Note >

1　a，b，c を相異なる実数とする．数列 $\{x_n\}$ は等差数列で，最初の 3 項が順に a，b，c であるとし，数列 $\{y_n\}$ は等比数列で，最初の 3 項が順に c，a，b であるとする．

(1)　b と c は a を用いて

$$b=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a,\quad c=\boxed{\text{エオ}}\,a$$

と表され，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である．

(2)　等比数列 $\{y_n\}$ の公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，$\{y_n\}$ の初項から第 8 項までの和は，a を用いて

$$\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}a$$

と表される．

(3)　数列 $\{z_n\}$ は最初の 3 項が順に b，c，a であり，その階差数列 $\{w_n\}$ が等差数列であるとする．このとき，$\{w_n\}$ の公差は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a$ であり，$\{w_n\}$ の一般項は

$$w_n=\frac{\boxed{\text{タ}}\,n-\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a$$

である．したがって，数列 $\{z_n\}$ の一般項は，a を用いて

$$z_n=\frac{a}{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナ}}\,n^2-\boxed{\text{ニヌ}}\,n+\boxed{\text{ネノ}}\right)$$

と表される．

＜ Note ＞

2　三つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ がある．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は，初項が -27 で，漸化式

$$a_{n+1}=3a_n+60 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．このとき

$$a_n=\boxed{\text{ア}}^n-\boxed{\text{イウ}}$$

である．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^n-\boxed{\text{キ}}\right)-\boxed{\text{イウ}}\,n$$

である．また，$S_n>0$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(2)　第 n 項が $2b_n+c_n$ で与えられる数列 $\{2b_n+c_n\}$ は，初項が 0 で公差が d の等差数列になり，第 n 項が b_n-2c_n で与えられる数列 $\{b_n-2c_n\}$ は，初項が x で公比が r の等比数列になるとする．このとき b_n+c_n は

$$b_n+c_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1)-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x\,r^{n-1}$$

と表される．

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は(1)，(2)を満たすとする．さらに，第 n 項が b_n+c_n で与えられる数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列は，数列 $\{a_n\}$ であるとする．このとき

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x(1-r)r^{n-1}$$

であるから，(1)より

$$r=\boxed{\text{ス}},\quad x=\frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad d=\boxed{\text{ツテト}}$$

である．したがって，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の第 n 項は，それぞれ

$$b_n=-\frac{\boxed{\text{ナ}}^n}{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌネ}}(n-1)$$

$$c_n=\boxed{\text{ノ}}^n-\boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$$

である．

＜ Note ＞

3

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ が

$$S_n=-n^2+24n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で与えられるものとする．このとき $a_1=$ アイ ，$a_2=$ ウエ である．また $a_n<0$ となる自然数 n の値の範囲は $n \geqq$ オカ であり，

$$\sum_{k=1}^{40} |a_k| = \boxed{キクケ}$$

となる．

(2)　初項 1，公比 3 の等比数列を $\{b_k\}$ とおく．各自然数 n に対して，$b_k \leqq n$ を満たす最大の b_k を c_n とおく．たとえば，$n=5$ のとき

$b_2=3$，$b_3=9$　であり　$b_1<b_2\leqq 5<b_3<b_4<\cdots$

なので　$c_5=b_2=3$　である．

(i)　$c_{10}=$ コ であり，$c_n=27$ である自然数 n は全部で サシ 個ある．

(ii)　$\sum_{k=1}^{30} c_k=$ スセソ である．

＜ Note ＞

第7講　数列①

1 (1)　数列 $\{a_n\}$ は初項が7，公差が -4 の等差数列とする．数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{アイ}}\,n+\boxed{\text{ウエ}}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\boxed{\text{オカ}}\,n^2+\boxed{\text{キ}}\,n$$

である．

(2)　数列 $\{b_n\}$ は，第 n 項が

$$b_n=pn^2-qn-r$$

という n の2次式で表され

$$b_{n+1}-2b_n=\boxed{\text{オカ}}\,n^2+\boxed{\text{キ}}\,n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots①$$

を満たすとする．このとき，

$$p=\boxed{\text{ク}},\quad q=\boxed{\text{ケ}},\quad r=\boxed{\text{コ}}$$

であり，$b_1=\boxed{\text{サシ}}$ である．

さらに，次の条件によって定まる数列 $\{c_n\}$ を考えよう．

$$c_1=1$$

$$c_{n+1}-2c_n=\boxed{\text{オカ}}\,n^2+\boxed{\text{キ}}\,n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots②$$

①と②より，$d_n=c_n-b_n$ とおくと

$$d_{n+1}-\boxed{\text{ス}}\,d_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．これより，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=\boxed{\text{セ}}\cdot\boxed{\text{ソ}}^{\,n-1}+\boxed{\text{ク}}\,n^2-\boxed{\text{ケ}}\,n-\boxed{\text{コ}}$$

である．

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^{n}c_k$ は

$$\boxed{\text{タ}}\cdot\boxed{\text{チ}}^{\,n}+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}n^3-\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}n^2-\frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}n-\boxed{\text{ノ}}$$

となる．

2　(1)　整数からなる等比数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+a_2=32$，$a_4+a_5=864$ を満たしている．このとき，

$$a_n=\boxed{ア}\cdot\boxed{イ}^{n-1}$$

であり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=\boxed{ウ}\cdot\boxed{エ}^{n}+\boxed{オ}n^2-\boxed{カ}$$

となる．

(2)　分数 $\frac{9}{37}$ を小数で表したときに小数第 n 位に現れる数を b_n とする．すべての自然数 n に対して $b_{n+p}=b_n$ となる最小の自然数 p は $\boxed{キ}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{100}b_k=\boxed{クケコ}$$

である．

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める.

(1) a_n を 10 で割った商を b_n とし，余りを c_n として，数列 $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ を定める. このとき

$a_n=10b_n+c_n$ （b_n と c_n は整数で，$0\leqq c_n<10$） である.

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$, $U_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$ とおく.

S_n を求めると $S_n=$ **ア** $^{n+\boxed{イ}}-$ **ウ** である.

数列 $\{c_n\}$ の初めの 5 項は $c_1=$ **エ**，$c_2=$ **オ**，$c_3=$ **カ**，$c_4=$ **キ**，$c_5=$ **ク** である.

自然数 p で，すべての n に対して $c_{n+p}=c_n$ となるものがあり，その最小のものは $p=$ **ケ** である. 以下では $p=$ ケ とし，自然数 n を $n=pl+m$ (l と m は整数で，$0\leqq m<p$) と表す. このとき

U_n- **コサ** l

は m だけで定まり，これを d_m とおけば $d_0=$ **シ**，$d_1=$ **ス**，$d_{p-1}=$ **セソ** である.

$S_n=$ **タチ** T_n+U_n であるから

$$T_n=\frac{\boxed{ツ}^{\,n}-\boxed{テ}}{\boxed{ト}}-\boxed{ナ}\,l-\frac{d_m}{\boxed{ニヌ}}$$ と表される.

(2) a_n を 11 で割った余りを e_n $(0\leqq e_n<11)$ として，数列 $\{e_n\}$ を定め $V_n=\sum_{k=1}^{n} e_k$ とおく.

自然数 q で，すべての n に対して $e_{n+q}=e_n$ となるものがあり，その最小のものは $q=$ **ネノ** である. $q=$ ネノ とし，自然数 n を $n=ql+m$ (l と m は整数で，$0\leqq m<q$) と表すとき

V_n- **ハヒ** l

は m だけで定まる.

< Note >

第７講　数列①

【CHECK & UP】

1

[1]　(1)　条件(A)：$a_3+a_5+a_7=93$　より

$(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)=93$

$a=-4d+31$　……①

条件(B)より　$a_{14}<100$　かつ　$a_{15}>100$

つまり　$a+13d<100$　かつ　$a+14d>100$

①を代入して　$10d>69$　かつ　$9d<69$

これを満たす整数 d は $d=\mathbf{7}$ のみ

このとき①より　$a=\mathbf{3}$

> 初項 a，公差 d の等差数列は
> ・$a_n=a+(n-1)d$　（n の１次式）
> ・$a_1=a$，$a_{n+1}-a_n=d$
> と表される．２番目は「漸化式」（後述）．
> １番目は「公式」という扱いだが，a から始まり d ずつ増加することから当然の式である．「d を加える回数」に注意．また，一般項は「n の１次式」すなわち単調増加または単調減少である．このため，「ある n で項の値が一定のラインを越える」ことがモチーフとなることがある．今回は $n=15$ で初めて 100 のラインを越える，すなわち $n=14$（まで）では越えていない．

(2)　(1)より　$a_n=3+(n-1)\cdot 7=7n-4$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ は等差数列 a_n の a_1 から a_n までの和である．

よって　$\dfrac{n\{3+(7n-4)\}}{2}>715$　　$n(7n-1)>1430$

ここで，$n(7n-1)$ を $7n^2$ とみなすと　$7n^2>1430$

$n^2>204.\cdots$　　よって　$n=14$ まで不適.

$15(7\cdot 15-1)=1560$　より　$n=15$ は適する.

ゆえに　$n=\mathbf{15}$

> Σ の計算をした人はいないだろうか？
> 「等差数列の和」であり，「公式」
> $\dfrac{\text{項数(たしはじめの項＋たしおわりの項)}}{2}$
> が存在する．
> 等差数列の「和の最大・最小」は，一般項が「0 ライン」を越えるまでというお約束であるが，「ある値より上（下）」は，まともに和を出す必要がある．ただし「２次不等式」を解くのはナンセンス．まともに解は出ないばかりか時間がかかりすぎてセンター向けではない．

[2]　(1)　$b_7=1$ より　$7p+q=1$　　$q=1-7p$　……①

また，$\{b_n\}$ は等差数列であるから

$S_{12}=10$　より　$\dfrac{12(b_1+b_{12})}{2}=10$

$3\{(p+q)+(12p+q)\}=5$　　これに①を代入して

$3(-p+2)=5$　　$\boldsymbol{p=\frac{1}{3}}$　　このとき　$\boldsymbol{q=-\frac{4}{3}}$

(2)　$b_n=\dfrac{1}{3}n-\dfrac{4}{3}$ より　$S_n=\dfrac{n\left(-1+\frac{1}{3}n-\frac{4}{3}\right)}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-7)}$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12}S_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{12}(k^2-7k)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 25-7\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}(2\cdot 13\cdot 25-7\cdot 6\cdot 13)=\frac{13}{3}(25-7\cdot 3)=\boldsymbol{\frac{52}{3}}$

> 上記の通り，n の１次式，すなわち「等差数列」である．よって「和の公式」が使える．
> (2)でわかるように，等差数列の和は「n の２次式かつ定数項が 0」である．知っておいてよいだろう．
> (3)は「和の和」である．もとが n の２次式であるため，「Σ の公式」が登場する．ついでに１次式の部分も Σ の公式を利用した．
> センター数学の数列は，時にこのような「数値計算」が要求されるため，折れることなく計算したい．とはいっても，気合いだけで計算するのではない．まずは Σ の前にくくり出す．計算途中で約分し，共通因数をくくり出す．
> 計算に長けている人には無用のアドヴァイスであろうが．

2

［1］ (1) 初項 18，公比 $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より $\boldsymbol{a_n=18\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}}$

よって　$a_6=18\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

(2) 求める和は，初項 $a_3=6$，公比 $\dfrac{1}{3}$，項数 6 の等比数列の和である．よって

$$\frac{6\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdot6\cdot\left(1-\frac{1}{729}\right)=\boldsymbol{\frac{728}{81}}$$

> 初項 a，公比 r の等比数列は
> ・$a_n=a\cdot r^{n-1}$
> ・$a_1=a$，$a_{n+1}=r\cdot a_n$
> と表される．一般項は「指数関数」の形であるが，r にマイナス（や 0）が許されるところが指数関数と異なる．r がプラスであれば，単調増加または減少である．
> 等差数列・等比数列に共通しているのは，「等間隔に間引いても等差・等比」であること．$a_1=18$，$a_3=6$ であるから，奇数番目の項は「公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列」．

> 等比数列の和の公式は，公比≠1 のとき
> $\dfrac{\text{たしはじめ}\cdot\{1-(\text{公比})^{\text{項数}}\}}{1-(\text{公比})}=\dfrac{\text{たしはじめ}\cdot\{(\text{公比})^{\text{項数}}-1\}}{(\text{公比})-1}$ である

［2］ (1) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると

$a_2=-\dfrac{1}{2}a_1$　より　$r=-\dfrac{1}{2}$

また　$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ より　$a-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}a=\dfrac{9}{4}$

$a=3$　　よって　$a_n=3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_4+a_5+a_6=\dfrac{-\frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{8}=\boldsymbol{-\dfrac{9}{32}}$

> 「等比数列」とわかっているからこそ，a_1 と a_2 の漸化式だけで公比がわかる．本格的な漸化式は次の講で扱う．
> $a_4+a_5+a_6=r^3(a_1+a_2+a_3)$ であるから，初項 a がわからなくても(1)の答えは出せる．ここでは「等比数列の和の公式の練習」を想定した解答となっている．

(2) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{r}=-2$ の等比数列．

よって，初項から第 n 項までの和は　$\dfrac{\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

これが 57 であることより　$\dfrac{\{1-(-2)^n\}}{9}=57$

$(-2)^n=-512$　　ゆえに　$n=\boldsymbol{9}$

> さらに等比数列は，「逆数にしても等比数列」である．よってその一般項も和も出すことができる．
> 「逆数」にするシーンは，この等比数列以外にも後述の「部分分数分解」による和のときにも見られる．

3 (1)　$a_1=S_1=2\cdot1^2+5\cdot1=7$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2+5n)-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=(2n^2+5n)-(2n^2-4n+2+5n-5)$

$=4n+3$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=4n+3}$

(2)　$a_1=S_1=3^1+1=4$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n+1-(3^{n-1}+1)$

$=3^n-3^{n-1}$

$=3\cdot3^{n-1}-1\cdot3^{n-1}$

$=(3-1)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$

これは $n=1$ のときには成り立たない.

ゆえに　$n\geqq2$ のとき　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$，$\boldsymbol{a_1=4}$

和（に関する式）が与えられていてそこから一般項を出す典型問題である.
第 n 項までの和から，その１項前までの和を引けば第 n 項が出るという，これまた当然の知識を利用するだけである．単純にこれだけで一般項が出る問題の出題はセンター試験においては多くはないが,「引き算」により目的のものを出すという工程は，式に「操作」を加えてから行うものや漸化式の形式のものなど，センター試験でも頻出の知識である.
また,「累乗」がからむ場合は，センター試験の解答が要求している形にまとめる必要がある．(2)で確認しておこう.
なお，このパターンは「初項」が出ていないので $n=1$ のときの項をまず最初に求めるくせをつけよう．あとからあわてふためくことのないように.
ちなみに「$n\geqq2$ のときの式が $n=1$ でも成立する」ものがセンター試験では圧倒的である．なぜならばマーク式のため，成立しないときは答えさせるときに「ばればれ」だからである．よって試験本番は「スルーする」こともできる．ただし,「一般項を介さず」和を求めさせるときもある．その場合は，$n\geqq2$ のときが「等差数列でも等比数列でもない」，つまり第２項から直接和を出すことができない場合は，第１項から目的の項までの和を求め，そこから第１項を除き，その後に真の初項を加えるといった丁寧な作業が必要となる.

数列においては,「公式は覚えたけどセンター形式では点数がとれない」という人が後を絶たない．まずその「公式」の「意味」と「正確な運用法」が本当に身についているであろうか．うろ覚えは論外であるが，そうでなくとも公式を文字で丸暗記しているようではお話にならない．繰り返すようだが「時間制限」が非常にきつい試験であるがゆえに，選ぶことができる選択肢は決して多くはない．特に「等差数列」「等比数列」は特別な数列であるため，特有の解法が数多く存在する．それも含め，基礎練習を怠ることなく学習を進めよう．その上に，次の講の学習や色本・赤本の練習が乗ることで初めて数列攻略の道が開ける.

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1 (1) $\{x_n\}: a,\ b,\ c,\ \cdots$ が等差数列より　$a+c=2b$　　よって　$c=2b-a$

$\{y_n\}: c,\ a,\ b,\ \cdots$ が等比数列より　$b\cdot c=a^2$

ゆえに　$b(2b-a)=a^2$　　$2b^2-ab-a^2=0$　　$(2b+a)(b-a)=0$

$a\neq b$ より　$b=\mathbf{-\frac{1}{2}}a$　　$c=\mathbf{-2}a$

よって　$\{x_n\}: a,\ -\frac{1}{2}a,\ -2a,\ \cdots$ より　公差 $\mathbf{-\frac{3}{2}}a$

(2) $\{y_n\}: -2a,\ a,\ -\frac{1}{2}a,\ \cdots$ より　公比 $-\frac{1}{2}$

初項から第8項までの和は　$\dfrac{-2a\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\cdot(-2a)\cdot\left(1-\frac{1}{256}\right)=\mathbf{-\frac{85}{64}}a$

(3) $\{z_n\}: b,\ c,\ a,\ \cdots$　すなわち　$\{z_n\}: -\frac{1}{2}a,\ -2a,\ a,\ \cdots$ の階差数列 w_n は

$\{w_n\}: -\frac{3}{2}a,\ 3a,\ \cdots$　これが等差数列であるとき，公差は $\mathbf{\frac{9}{2}}a$

よって　$w_n=-\frac{3}{2}a+(n-1)\cdot\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}an-6a=\mathbf{\frac{9n-12}{2}}a$

$n\geqq 2$ のとき　$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}w_k=-\frac{1}{2}a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{9k-12}{2}a=-\frac{1}{2}a+\frac{(n-1)(w_1+w_{n-1})}{2}$

$=-\frac{1}{2}a+\dfrac{(n-1)\left(-\frac{3}{2}a+\frac{9n-21}{2}a\right)}{2}=\frac{a}{4}\{-2+(n-1)(9n-24)\}$

$=\mathbf{\frac{a}{4}(9n^2-33n+22)}$　これは $n=1$ のときも成り立つ．

2 (1) $a_{n+1}=3a_n+60$　……①　$a_1=-27$

$\alpha=3\alpha+60$　……②

①，②を辺々引いて　$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$　　②より　$\alpha=-30$

よって，①は　$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$　と変形できる．また　$a_1+30=3$

したがって，数列 $\{a_n+30\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列である．

よって　$a_n+30=3\cdot 3^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=\mathbf{3^n-30}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3^k-30)=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\mathbf{\frac{3}{2}(3^n-1)}-30n$

$\{a_n\}: -27,\ -21,\ -3,\ 51,\ 213,\ \cdots\cdots$ より　$S_n>0$ となる最小の n は $n=\mathbf{5}$ である．

(2) $2b_n+c_n=(n-1)d$　……③　　$b_n-2c_n=x\cdot r^{n-1}$　……④

(③×2＋④)÷5　より　$b_n=\frac{1}{5}\{2(n-1)d+xr^{n-1}\}$

(③－④×2)÷5　より　$c_n=\frac{1}{5}\{(n-1)d-2xr^{n-1}\}$

ゆえに　$b_n+c_n=\mathbf{\frac{3}{5}}d(n-1)-\mathbf{\frac{1}{5}}xr^{n-1}$

(3)　数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列が a_n より　$(b_{n+1}+c_{n+1})-(b_n+c_n)=a_n$

よって　$a_n=\left(\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr^n\right)-\left\{\frac{3}{5}d(n-1)-\frac{1}{5}xr^{n-1}\right\}$

$$=\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr\cdot r^{n-1}-\frac{3}{5}dn+\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}xr^{n-1}=\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}$$

また，(1)より　$a_n=-30+3\cdot3^{n-1}$ であるから，係数比較して

$\frac{3}{5}d=-30,\ r=3,\ \frac{1}{5}x(1-r)=3$　　ゆえに　$r=\mathbf{3},\ x=\mathbf{-\frac{15}{2}},\ d=\mathbf{-50}$

したがって　$b_n=-\mathbf{\frac{3^n}{2}}-\mathbf{20}(n-1)$　　$c_n=\mathbf{3}^n-\mathbf{10}(n-1)$

3 (1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=-n^2+24n$　　$a_1=S_1=-1+24=\mathbf{23}$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(-n^2+24n)-\{-(n-1)^2+24(n-1)\}$

$=-2n+25$　($n=1$ のときも成立)

よって　$a_2=\mathbf{21}$

また，$a_n<0$　つまり　$-2n+25<0$ となるのは　$n>\frac{25}{2}$ より　$n\geqq\mathbf{13}$

$$\sum_{k=1}^{40}|a_k|=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{40}(-a_k)=S_{12}-(S_{40}-S_{12})=2S_{12}-S_{40}$$

$$=2(-144+288)-(-1600+960)=\mathbf{928}$$

※　$\sum_{k=1}^{12}a_k-\sum_{k=13}^{40}a_k=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}-\frac{28(a_{13}+a_{40})}{2}$

$$=6(23+1)-14(-1-55)=144+784=928$$

(2)　$b_n=1\cdot3^{n-1}$　　$\{b_n\}:1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots$

(i)　$b_k\leqq10<b_{k+1}$ を満たす b_k が c_{10} である．$b_3=9,\ b_4=27$ より　$c_{10}=b_3=\mathbf{9}$

$c_n=27$　すなわち　$c_n=b_4$ より　$b_4\leqq n<b_5$

すなわち　$b_4\leqq n\leqq b_5-1$ となる自然数 n の個数は $27\leqq n\leqq80$ の $80-27+1=\mathbf{54}$ 個ある．

(ii)　$c_n=b_1=1$ となる n は　$b_1\leqq n\leqq b_2-1$　すなわち　$1\leqq n\leqq2$ の 2 個である．

$c_n=b_2=3$ となる n は　$b_2\leqq n\leqq b_3-1$　すなわち　$3\leqq n\leqq8$ の $8-3+1=6$ 個である．

$c_n=b_3=9$ となる n は　$b_3\leqq n\leqq b_4-1$　すなわち　$9\leqq n\leqq26$ の $26-9+1=18$ 個である．

ゆえに　$\sum_{k=1}^{30}c_k=1\times2+3\times6+9\times18+27\times4=\mathbf{290}$　である．

第７講　数列①

1 (1) $a_n=7+(n-1)\cdot(-4)=\mathbf{-4n+11}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{7+(-4n+11)\}}{2}=\mathbf{-2n^2+9n}\quad\cdots\cdots①$$

(2) $b_n=pn^2-qn-r$ について

$$b_{n+1}-2b_n=p(n+1)^2-q(n+1)-r-2(pn^2-qn-r)$$
$$=-pn^2+(2p+q)n+p-q+r$$

これと①を係数比較して　$-p=-2,\ 2p+q=9,\ p-q+r=0$

ゆえに　$\mathbf{p=2,\ q=5,\ r=3}$　　このとき　$b_n=2n^2-5n-3$　より　$b_1=-6$

さらに　$c_{n+1}-2c_n=-2n^2+9n$　……②，$c_1=1$ について

$b_{n+1}-2b_n=-2n^2+9n$　……③，$b_1=\mathbf{-6}$

②−③ より　$(c_{n+1}-b_{n+1})-2(c_n-b_n)=0$　　よって　$d_n=c_n-b_n$ とおくと

$d_{n+1}-\mathbf{2}d_n=0$　つまり　$d_{n+1}=2d_n,\ d_1=c_1-b_1=7$

ゆえに，数列 $\{d_n\}$ は初項 7，公比 2 の等比数列より

$d_n=7\cdot2^{n-1}$　つまり　$c_n-b_n=7\cdot2^{n-1}$

よって　$c_n=\mathbf{7\cdot2}^{n-1}+2n^2-5n-3$　である．

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{7(2^n-1)}{2-1}+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$
$$=7\cdot2^n-7+\frac{1}{3}n(2n^2+3n+1)-\frac{5}{2}(n^2+n)-3n$$
$$=7\cdot2^n+\frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{1}{3}n-\frac{5}{2}n^2-\frac{5}{2}n-3n-7$$
$$=\mathbf{7\cdot2}^n+\mathbf{\frac{2}{3}}n^3-\mathbf{\frac{3}{2}}n^2-\mathbf{\frac{31}{6}}n-\mathbf{7}$$

2 (1) 初項を a，公比を r とすると

$a_1+a_2=32$ より　$a+ar=32$　　$a(1+r)=32$　……①

$a_4+a_5=864$ より　$ar^3+ar^4=864$　　$ar^3(1+r)=864$　……②

②に①を代入して　$32r^3=864$　　$r^3=27$　　よって　$r=3$　　このとき　$a=8$

よって　$a_n=\mathbf{8\cdot3}^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=\sum_{k=1}^{n}(8\cdot3^{k-1}+4k-2)=\frac{8(3^n-1)}{3-1}+\frac{n\{2+(4n-2)\}}{2}$$
$$=\mathbf{4\cdot3}^n+\mathbf{2}n^2-\mathbf{4}$$

(2) $\dfrac{9}{37}=0.243243\cdots\cdots$ より，243 を周期 3 で繰り返すので

$b_{n+p}=b_n$ となる最小の自然数は　$p=\mathbf{3}$

このとき小数第 n 位に現れる数 b_n について　$100\div3=33\cdots1$ より

$$\sum_{k=1}^{100}b_k=(2+4+3)\cdot33+2=\mathbf{299}$$

3　$\{a_n\}$：2，4，8，16，32，64，128，256，512，1024，2048，……

(1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\mathbf{2^{n+1}-2}$

a_n を 10 で割った商 b_n と余り c_n について

（$a_n=10b_n+c_n$，b_n と c_n は整数，$0\leqq c_n<10$）

$c_1=\mathbf{2}$，$c_2=\mathbf{4}$，$c_3=\mathbf{8}$，$c_4=\mathbf{6}$，$c_5=\mathbf{2}$，$c_6=4$，……

よって，c_n は 2，4，8，6 を周期 4 で繰り返すので

$c_{n+p}=c_n$　となる最小の自然数は　$p=\mathbf{4}$

$p=4$ のとき

$n=pl+m=4l+m$　（l と m は整数で，$0\leqq m<4$　つまり　$m=0,1,2,3$）とすると，

n を 4 で割った商が l，余りが m である．

このとき　$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{4l+m}c_k=(2+4+8+6)\cdot l+$(最後の m 個の項の和)

$U_n-\mathbf{20}l=$(最後の m 個の項の和)　これは m だけで定まる．

これを d_m とおくと

$d_0=\mathbf{0}$，　$d_1=\mathbf{2}$，　$d_2=2+4=6$，　$d_{p-1}=d_3=2+4+8=\mathbf{14}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(10b_k+c_k)=10\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}c_k=\mathbf{10}T_n+U_n$　であるから

$T_n=\frac{1}{10}S_n-\frac{1}{10}U_n=\frac{1}{10}(2^{n+1}-2)-\frac{1}{10}(20l+d_m)$

$=\frac{\mathbf{2^n-1}}{\mathbf{5}}-\mathbf{2}l-\frac{d_m}{\mathbf{10}}$

(2)　a_n を 11 で割った余り e_n について

$\{e_n\}$：2，4，8，5，10，9，7，3，6，1，2，……

よって，e_n は周期 10 で繰り返すので

$e_{n+q}=e_n$　となる最小の自然数は　$q=\mathbf{10}$

このとき，$n=10l+m$（l と m は整数で，$0\leqq m<10$）と表すとき

$V_n=\sum_{k=1}^{n}e_k$ とおくと，

$V_n=(2+4+8+5+10+9+7+3+6+1)\cdot l+$(最後の m 個の項の和)　より

(1)と同様に，$V_n-\mathbf{55}l$ は m だけで定まる．